МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ КАФЕДРЫ ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Прокашева В.А., Яшкин В.И.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Одним из основных содержательных принципов преподавания математики является положение о том, что в дисциплинах математического цикла изучаются математические модели [1, с.45]. Далее для учебного процесса рассматривается только класс моделей, которые строятся с помощью дифференциальных уравнений.

Наиболее типичными для моделей физической географии, динамической метеорологии, медико-биологического цикла являются непрерывно-временные модели. Уже более трёх десятилетий в курсе высшей математики для студентов различных географических и биологических специальностей БГУ преподается раздел «Дифференциальные уравнения и их приложения» [2, 3]. После изложения теоретического материала изучается общая схема составления и решения модели. Студентам излагаются прикладные задачи, которые моделируются обыкновенными дифференциальными уравнениями с начальными условиями. Важным методическим элементом является исследование смысла полученного решения и возможности управления посредством изменения входных условий Коши.

В качестве примера приведем задачу о взаимоотношении двух биологических видов, известную под названием «хищник–жертва»: в замкнутом регионе (пастбище) растет трава, которую поедают овцы, при этом овцы «хищник», трава – «жертва». Для построения модели вводятся следующие обозначения: функции времени $x(t)$ и $y(t)$ – биомассы видов «хищник» и «жертва» соответственно. В простейшей схеме, когда $x(t) \geq 0$, $a > 0$, «хищник» имеет достаточно пищи и размножается, в случае $x(t) < a$ «хищник» начинает вымирать. Это описывается дифференциальным уравнением:

$$x'(t) = k\cdot(y(t) - a), \quad a > 0, \quad k > 0 \qquad (1)$$

Для вывода второго уравнения совместно с аудиторией проводится следующая цепочка рассуждений. Если биомасса «хищника» не больше числа $b>0$,то «хищник» поедает «жертву» медленнее, поэтому происходит прирост биомассы «жертвы». Это дает дифференциальное уравнение для скорости изменения биомассы «хищника»:

$$y'(t) = l\cdot(b - x(t)), \quad b > 0, \quad l > 0. \qquad (2)$$

Таким образом, математической моделью нашей задачи является система дифференциальных уравнений (1)-(2) при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0. \qquad (3)$$

Метод решения задачи Коши (1)–(3) состоит в дифференцировании (1) и подстановке в него $y'(t)$ из (2), с последующим интегрированием относительно $x(t)$ получившегося уравнения колебаний

$$x''(t) = -k\cdot l\cdot(x(t) - b). \qquad (4)$$

Решая (4) как ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, находим общее решение (1)–(2):

$$x(t) = b + A\cos\left(\sqrt{k\cdot l}\cdot t + B\right), \quad y(t) = a + A\sqrt{l/k}\sin\left(\sqrt{k\cdot l}\cdot t + B\right). \qquad (5)$$

Из (5) видно, что величины биомасс «хищника» и «жертвы» совершают колебания около значений заданных констант a и b с одним и тем же периодом, сдвинутым по времени.

Заметим, что регулирующая роль человека в этой задаче проявляется в задании начальных данных (3): подкос травы – y_0, контроль поголовья овец – x_0. Чтобы успешно управлять моделируемым процессом, следует рассчитать амплитуду колебаний:

$$A = \sqrt{(x_0 - b)^2 + \frac{k}{l}(y_0 - a)^2}\ .$$

Преподавание математики осуществляется сотрудниками кафедры общей математики и информатики на основе принципа профессиональной направленности и успешно развивается на биологическом факультете усилиями В.А. Прокашевой, Н.В. Кепчик, П.В. Плащинского, на географическом факультете – О.М. Матейко, А.Н. Таныгиной.

В главе «Дифференциальные уравнения» нового учебного пособия для студентов- географов изложены некоторые типовые модели, которые встречаются в различных областях знания, связанных с географическими и геологическими специальностями [4]. Этот материал традиционно изучается студентами географического факультета Белорусского государственного университета во втором семестре.

На химическом факультете В.А. Прокашева разработала спецкурс «Математическое моделирование в формации», Н.А. Дегтяренко преподает классическую дисциплину «Математическое моделирование химических процессов», продолжая традиции О.Г. Душкевича и В.И. Яшкина применения современного компьютерного ПО в вычислительном эксперименте. Сотрудниками кафедры В.Г. Скатецким и В.И. Яшкиным в сотрудничестве с доктором химических наук, профессором Д.В. Свиридовым создано пособие по математическому моделированию на основе многолетнего опыта преподавания математики и информатики на химическом факультете БГУ [5]. В рамках всего пособия тщательно соблюдается единая методика изложения материала, базирующаяся на общих принципах математического моделирования. Решение задач сопровождается примерами программной реализации в системах Wolfram Research Mathematica, Turbo Pascal, Microsoft Visual Basic. Например, в учебном процессе на химическом факультете различные модели для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка рассматриваются А.А. Самодуровым и Н.С. Коваленко.

Для студентов четвертого курса механико-математического факультета разработана и преподается дисциплина «Краевые задачи в микроэлектронике». Основное внимание в нем уделено построению и решению математических моделей с применением различных принципов идеализации; анализу решений в зависимости от свойств краевых условий с использованием научного программного обеспечения ПК [6].

Делаются первые шаги по внедрению в учебный процесс математических моделей с дифференциальными уравнениями на факультете международных отношений [7].

Литература

1. Кудрявцев, Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
2. Прокашева, В.А. Дифференциальные уравнения и их приложения: метод. указания, задачи и упр. для студ. спец. 2013 / В.А. Прокашева, Т.И. Рогачевич. – Минск: БГУ, 1987. – 47 с.
3. Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.
4. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учебное пособие. В 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – Часть 1. – 271 с.; 2013. – Часть 2. – 175 с.
5. Скатецкий, В.Г. Математическое моделирование физико-химических процессов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск: БГУ, 2003. – 293 с.
6. Яшкин, В.И. Краевые задачи в микроэлектронике: учебное пособие для студентов специализации 1-31 03 01-01 25 «Математическая электроника» / В.И. Яшкин. – Минск: БГУ, 2004. – 76 с.
7. Барановская, С.Н. Применение дифференциальных уравнений для решения некоторых моделей менеджмента / С.Н. Барановская, В.И. Яшкин // Медико-социальная экология личности: состояние и перспективы: материалы XI Междунар. конф., Минск, 17–18 мая 2013 г. / редкол.: В.А. Прокашева (отв. ред.) [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 474–476.